

## ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

# Comparación analítica de cuatro modelos para reconstrucción de trayectorias balísticas

 Vicente Torres Zúñiga <sup>1</sup>✉, José Guadalupe Bañuelos Muñeton <sup>2</sup>
<sup>1</sup>Escuela Nacional de Ciencias Forenses, Universidad Nacional Autónoma de México.

<sup>2</sup>Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad Nacional Autónoma de México.

✉ vicentetorres@enacif.unam.mx

## Datos del artículo

Cita: Torres Zúñiga Vicente, Bañuelos Muñeton José Guadalupe. 2023. Comparación analítica de cuatro modelos para reconstrucción de trayectorias balísticas. Revista Digital de Ciencia Forense. 2(3): 17-35 pp.

Editor: Mirsha Quinto-Sanchez.

Recibido: 24 marzo 2024.

Aceptado: 17 abril 2024.

Publicado: 30 abril 2024.

## Resumen

Presentamos un análisis detallado de varios modelos de trayectoria balística aplicados en el campo forense, incluidos modelos de línea recta, parabólicos y que consideran efectos de arrastre lineal y cuadrático. Dos criterios analíticos nos permiten comparar la efectividad de estos modelos, facilitando identificar circunstancias en las que es conveniente utilizar un modelo más complejo que uno más simple. Basándose únicamente en la velocidad inicial del proyectil, la justificación numérica apoya la elección de una trayectoria recta en lugar de una parabólica, o un modelo de resistencia lineal en lugar de esta última. El modelo cuadrático presenta la mejor expresión para el caso expuesto, pero sólo puede compararse con el modelo de resistencia lineal en determinadas circunstancias. Las mediciones experimentales también respaldaron los resultados teóricos. Asimismo, esta contribución ofrece recursos didácticos para diversos niveles educativos y para diferentes perfiles profesionales; pero se centra en un área forense: el disparo de proyectiles por arma de fuego.

**Palabras clave:** arma de fuego, trayectoria de proyectil, física forense, criterio forense, matemática forense.

## Abstract

We present a detailed analysis of various ballistic trajectory models applied in the forensic field, including straight line, parabolic, and models that consider linear and quadratic drag. Two analytical criteria allow us to compare the effectiveness of these models, making it easier to identify circumstances in which it is preferable to use a more complex model rather than a simpler one. Based only on the initial velocity of the projectile, the numerical justification supports choosing a straight-line trajectory over a parabolic one, or a linear drag model over this. The quadratic model presents the best expression for the exposed case, but it can only be compared to the linear resistance model in certain circumstances. Experimental measurements also supported the theoretical results. Also, this contribution offers teaching resources for various educational levels and for different professional profiles; but it is centered on one forensic area: projectiles fired by firearm.

**Keywords:** firearm, projectile trajectory, forensic physics, forensic criteria, forensic mathematics.

## Introducción

La reconstrucción de trayectorias balísticas es un tópico esencial en la ciencia forense pero poco desarrollado en el quehacer que se desahoga en los tribunales. Aunque en la academia existen tratados sobre trayectorias balísticas, el público objetivo es más cercano a la física matemática que a los profesionales que laboran como peritos, ministerios públicos, fiscales, abogados o jueces. Por ejemplo, guías elaboradas especialmente para que los jueces valoren la prueba pericial en materia de balística excluyen el examen de trayectorias y la reconstrucción del lugar de los hechos (1). Más aún, libros especializados en la perspectiva forense sobre tiroteos soslayan los alcances de la aplicación de los diferentes modelos fisicomatemáticos (2). De modo que no es tema agotado en la literatura especializada y poco utilizado en pesquisas.

En términos de balística forense, por lo general, se considera adecuado utilizar el modelo de línea recta cuando es corta la distancia entre el cañón de un arma de fuego activada (3,4), si es una distancia mediana, entonces es conveniente utilizar el modelo parabólico (5) y a enormes distancias el uso de los modelos de arrastre (6). Sin embargo, no quedan claros los límites e intervalos de validez de cada modelo.

En una publicación anterior presentamos un criterio que justifica el uso de un modelo lineal y un modelo parabólico en la reconstrucción de una trayectoria balística (7). Considerando que un modelo lineal y un parabólico se parecerán en un 99% hasta una distancia de  $x_{0.99}$  que es una función de la velocidad inicial  $v_0$  si se cumple la condición expresada por una ecuación sencilla.

Sin embargo, quedó pendiente la comparación con otros modelos, en particular en el que la parábola se modifica a causa de la acción de la resistencia del aire oponiéndose al viaje del proyectil.

En esta contribución hacemos una revisión a la propuesta inicial y la ampliamos. Hasta el momento, es de nuestro conocimiento que esta es la primera publicación que trata el tema del uso adecuado entre estos cuatro modelos de trayectoria para el quehacer forense. En la figura 1 se ilustra la idea de la propuesta al transitar de un modelo a otro utilizando una justificación cimentada en la física del desplazamiento del proyectil.

El documento tiene la siguiente estructura: Primero se presentan los desarrollos teóricos de cada modelo de línea recta, después del parabólico, su criterio de comparación entre ellos. Más adelante, se detalla un modelo de trayectoria que considera el arrastre lineal del aire y proyectil, el criterio de comparación entre el modelo parabólico y de arrastre lineal. Esta sección cierra con la presentación de un modelo de resistencia cuadrática y su comparación con el modelo de arrastre lineal. Después se presenta la comparación gráfica de los diferentes modelos y sus criterios de comparación, exhibiendo cálculos de

casos específicos para balística forense. A continuación, se presenta un estudio empírico con una lanzadera de dardos. De tal modo este texto trata de cubrir aspectos teóricos y empíricos, pero sobre todo brindar herramientas que sean de utilidad para quienes deben reconstruir una trayectoria balística.



**Figura 1.** Esquema de evolución de modelos, iniciando con el que menos datos físicos considera y más simple, la trayectoria lineal. Él que en orden se transforma modelos más sofisticados: trayectoria parabólica, con arrastre lineal y con arrastre cuadrático. La decisión de utilizar un modelo se fundamenta en un criterio. Si dos modelos son equivalentes se puede usar el más sencillo, hasta una distancia límite. Es de esperar que las distancias límites entre modelos sean mayores dependiendo de las condiciones implicadas.

## Consideraciones teóricas

### Modelo lineal

Sin pérdida de generalidad, supondremos que el proyectil se desplaza dentro de un plano. De modo que la trayectoria que describe el objeto se encuentra contenida en el espacio matemático bidimensional. El plano donde se describe la trayectoria se considera paralelo al plano contenido en los ejes- $xy$ .

La línea recta es el modelo más simple de describir la trayectoria, pero también es el que menos parámetros físicos considera (8). Desde el punto de vista de la geometría analítica se puede escribir como:

$$y=ax+b \tag{1}$$

donde  $a$  representa la pendiente de la recta y  $b$  la ordenada de origen. Sin embargo, esta ecuación se extiende por todo el espacio. En temas forenses esta recta será delimitada entre las coordenadas de la boca del cañón del arma de fuego ( $x_1, y_1$ ) y el punto donde impacta con el objetivo del disparo ( $x_2, y_2$ ). Considerando estos dos puntos es posible obtener la pendiente de la ecuación y su coordenada independiente. De un modo general la ecuación se puede escribir del siguiente modo:

$$y= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} (x-x_1) + y_1 \tag{2}$$

O bien en términos del otro punto que presenta el indicio:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 \quad [3]$$

Las ecuaciones anteriores son equivalentes al contener a los puntos involucrados. La obtención del punto  $(x_2, y_2)$  implica la localización espacial y caracterización geométrica de la zona donde impactó el proyectil. Lo cual se hace con varillas cuando existen boquetes o agujeros, o por medios digitales, analizando escaras u otros medios de investigación.

Ahora, para realizar la comparación entre modelos vamos a suponer que el disparo se realiza horizontalmente, de modo que la pendiente es igual a cero. Es decir,  $y_2 = y_1$ . Simplificando el modelo lineal a una constante:  $y = y_1$ .

### Modelo parabólico

Al considerar el efecto de la gravedad, el proyectil se desvía de la trayectoria recta y describe una parábola. Y ahora varios parámetros físicos se deben tomar en cuenta. Tales como la velocidad inicial  $v_0$ , el tiempo  $t$ , y la constante gravitacional  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . El ángulo del disparo se interrelaciona con la pendiente. Entonces, de la literatura se tiene que las ecuaciones paramétricas de este modelo son:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (v_0 \cos \theta) t \\ y &= y_0 + (v_0 \sin \theta) t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \quad [4]$$

En la mayoría de los casos forenses el llamado “tiempo de vuelo” del proyectil no es un parámetro crucial de investigación. Por lo que se prefiere escribir la ecuación de la trayectoria parabólica en un sistema cartesiano, la cual es descrita por:

$$y = y_0 + x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad [5]$$

De hecho, se puede observar que presenta la forma analítica de la ecuación de una parábola y como función de  $x$ .

Ahora, como en caso del modelo anterior, consideremos que el tiro es horizontal, de manera que  $\theta = 0$ , lo que implica que  $\cos(\theta) = 1$ , y que  $\tan(\theta) = 0$ . De modo que la ecuación se simplifica a la siguiente expresión:

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad [6]$$

Si los dos modelos representan el movimiento del mismo proyectil, entonces deben coincidir en el punto de origen. De modo que  $y_0 = y_2$ . Más aún, consideremos que el origen de coordenadas más adecuado para realizar la comparación es (0, -1). Ya que si se elige el origen (0, 0) una comparación entre modelos puede resultar en indeterminaciones matemáticas, si se escoge que el origen sea  $y_0 > 0$  en algún momento del recorrido la parábola cruzara por el cero, lo que de nuevo implicara una ambigüedad de interpretación para algunos puntos. De tal modo que la coordenada (0,-1) nos permite una buena comparación entre el modelo lineal y el parabólico.

### Comparación entre modelos lineal y parabólico

En el desarrollo de la física, ha resultado beneficioso aprovechar la operación de dividir dos cantidades para comparar y analizar fenómenos naturales. Este enfoque se sustenta en la premisa de que muchas magnitudes físicas se relacionan de manera proporcional o inversa, lo que permite establecer comparaciones significativas entre diferentes sistemas o situaciones.

Una de las aplicaciones más comunes de esta técnica es la comparación de velocidades. Al dividir la distancia recorrida por un objeto entre el tiempo que le lleva en recorrerla, se obtiene la velocidad. Esta velocidad puede compararse con la de otros objetos en circunstancias similares o con velocidades de referencia conocidas. Por ejemplo, al comparar la velocidad de un automóvil con la velocidad máxima permitida en una carretera, se puede determinar si el automóvil está excediendo los límites permisibles. Además, la división de dos cantidades es esencial en la física para calcular magnitudes como la aceleración, la densidad, la resistencia eléctrica y muchas otras. Estas magnitudes proporcionan información crucial sobre el comportamiento y las características de los sistemas físicos que se estudian.

Para el tema que exponemos en este documento, utilizaremos la división para comparar los dos modelos. En el numerador colocaremos el modelo inicial y en el denominador el precedente. Es decir, el modelo de la línea recta  $y_1$  sobre el modelo parabólico  $y_p$ . Es evidente que para todo punto  $y_1 > y_p$ , excepto el origen donde  $y_1 = y_p$ . Más aún,  $y_p$  es una función monótona decreciente, de modo que cuando mayor sea el valor de  $x$ , mayor será la diferencia entre ambas. Esta diferencia la podemos escribir del siguiente modo:

$$\frac{y_1}{y_p} = \frac{-1}{-1 - \frac{g}{2v_0^2} x^2} \quad [7]$$

Definamos el índice adimensional  $C = y_1 / yp$ . Este será un criterio de comparación entre la separación de la distancia vertical del modelo lineal y del parabólico. Reiteramos, que si  $C = 1$ , implica que  $y_1 = yp$ , de modo que los modelos son iguales; pero esto solo sucede en el origen de coordenadas (0,-1) después de este punto tendremos que el numerador 1 es dividido por valores superiores a 1 en sucesión monótona ascendente de tal forma que el valor de  $C$  disminuirá de forma continua descendente. Es decir, mientras más grande sea  $x$ , menor será  $C$ . De modo que  $C$  carece de cota máxima. Entonces, al definir  $C$ , la única variable desconocida es  $x$ , la cual se puede determinar y la etiquetaremos como  $xc$ , ese será el valor límite para asegurar que los comportamientos de los dos modelos son similares.

De tal modo, reordenando signos, podemos escribir a  $C$  como una función de  $xc$  mediante la siguiente expresión:

$$C = \frac{1}{1 + \frac{g}{2v_0^2} x^2} \quad [8]$$

Despejando  $xc$  obtenemos la ecuación que nos interesa:

$$xc = v_0 \sqrt{\left(\frac{1}{C} - 1\right) \frac{2}{g}} \quad [9]$$

Esta ecuación nos permite la comparación entre los modelos de trayectoria lineal y parabólico. Por ejemplo, si el criterio es laxo, como puede ser  $C = 0.8$ . Obtenemos que solo se debe multiplicar la velocidad inicial por una constante:

$$x_{0,8} \approx 0.2259 v_0 \quad [10]$$

Para ilustrar la idea, para un proyectil con una velocidad de 235 m/s esta distancia es 79.056 m. Es decir, después de esta distancia no se puede utilizar el modelo lineal con un criterio de que se deben parecer ambas trayectorias en un 80%.

### *Modelo que considera la resistencia del aire contra el movimiento del proyectil*

Hoy en día, aún la mayoría de los modelos que consideran la fricción entre el aire y el proyectil en movimiento son numéricos (6,9). Sin embargo, existen algunos modelos analíticos, pero que suelen considerar una serie de parámetros que solo son posibles de obtener cuando se cuenta con el control del objeto de estudio (10). En temas forenses es inusual obtener todos los datos de área efectiva, peso, coeficiente de fricción, entre otros. Tal vez el parámetro más accesible de conseguir sea la velocidad terminal, que posee la ventaja de resumir la información de parámetros particulares de los proyectiles. Tal modelo es poco conocido y aquí presentamos una propuesta para deducirlo.

Supongamos que un proyectil de masa  $m$  en movimiento es afectado por la resistencia del aire que actúa en sentido opuesto a la dirección del desplazamiento, y que su magnitud es directamente proporcional a la velocidad instantánea del proyectil. En un sistema cartesiano, podemos escribir la ecuación de movimiento como:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - rv \tag{11}$$

Donde  $r$  representa una constante positiva, asociada a la resistencia al desplazamiento del proyectil. Esta ecuación se puede dividir en dos componentes:

$$\frac{dv_x}{dt} = -g \frac{vx}{v_T} \tag{12}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \left( 1 + \frac{vy}{v_T} \right) \tag{13}$$

Donde  $v_T = mg/r$  es la velocidad terminal. En otras palabras, es la velocidad asociada al movimiento del proyectil cuando la fuerza de arrastre es igual a la ejercida debido a gravedad.

Integrando la ecuación de la velocidad en  $x$  tenemos:

$$\int_{v_{x0}}^v \frac{dv_x}{v_x} = \int_{v_T}^t - \frac{g}{v_T} dt \tag{14}$$

Por lo que obtenemos:

$$\ln \left( \frac{v_x}{v_{x0}} \right) = - \frac{g}{v_T} t \tag{15}$$

Sabemos que  $v_{x0} = v_0 \cos(\theta)$ . Por lo cual podemos escribir:

$$v_x = v_0 \cos(\theta) \exp\left(\frac{-gt}{v_T}\right) \tag{16}$$

En esta ecuación notamos que la velocidad horizontal es afectada por el arrastre. De otro modo, sería una constante, lo que sucede cuando la escala temporal es  $t < \frac{v_T}{-gt}$ .

Ahora, considerando la componente en el eje vertical el desarrollo anterior, procedemos de modo similar al anterior, obteniendo:

$$\int_{v_{y0}}^v \frac{dv_y}{v_t + v_y} = \int_0^t \frac{-g}{v_T} dt \quad [17]$$

Al integrar obtenemos:

$$\ln \left( \frac{v_T + v_y}{v_T + v_{y0}} \right) = \frac{-g}{v_T} t \quad [18]$$

Recordando que  $v_{y0} = v_o \sin(\theta)$ . Así que podemos despejar  $v_y$ :

$$v_y = v_o \sin(\theta) \exp\left(\frac{-gt}{v_T}\right) - v_T \exp\left(1 - \frac{-gt}{v_T}\right) \quad [19]$$

Observando las ecuaciones de  $(v_x, v_y)$  si el proyectil se mantiene mucho tiempo en el aire, en el orden superior de  $\frac{v_T}{g}$ , entonces caerá tendiendo a la vertical con velocidad terminal  $v_T$ , sin importa el ángulo de lanzamiento.

Para obtener las ecuaciones paramétricas en el espacio, se integra una vez más, como el desplazamiento como función del tiempo. Donde para  $x$  obtenemos:

$$x = \frac{v_o v_T \cos(\theta)}{g} \left(1 - \exp\left(\frac{-gt}{v_T}\right)\right) \quad [20]$$

Para tiempos muy cortos  $t < \frac{v_T}{g}$ . La ecuación se reduce a la solución parabólica:

$$x = v_o \cos(\theta)t \quad [21]$$

En contraste  $t > \frac{v_T}{g}$ , nos determina el alcance considerando el arrastre:

$$x = \frac{v_o v_T \cos(\theta)}{g} \quad [22]$$

Continuando con el desarrollo de la ecuación de trayectoria considerando el arrastre y un ángulo de disparo horizontal, despejamos la velocidad terminal, y obtenemos:



$$v_T = \frac{xg}{v_0} \tag{23}$$

Ahora, considerando el caso vertical, integrando la expresión de la velocidad en  $y$ , obtenemos:

$$y = \frac{v_T}{g} (v_0 \sin(\theta) + v_T) \left(1 - \exp\left(\frac{-gt}{v_T}\right)\right) - v_T t \tag{24}$$

Cuando el movimiento inicia  $t < \frac{v_T}{g}$ , la expresión se reduce al modelo parabólico:

$$y = v_0 \sin(\theta) t - \frac{2}{g} t^2 \tag{25}$$

En contraste, para  $t > \frac{v_T}{g}$ ; tenemos:

$$y = \frac{v_T}{g} (v_0 \sin(\theta) + v_T) - v_T t \tag{26}$$

### Comparación entre el modelo parabólico y el de arrastre lineal

Considerando el despeje de la velocidad terminal y que el tiro es horizontal tenemos:

$$y = \frac{g}{v_0^2} x^2 \left(1 - \exp\left(\frac{-gt}{v_T}\right)\right) - \frac{xg}{v_0} t + y_0 \tag{27}$$

La cual es la ecuación de una parábola  $y(x)$ . Ahora como los efectos de resistencia son apreciables a tiempos superiores de  $\frac{v_T}{g}$ . Siendo tolerables, se deben comenzar a observar a  $t = 2 \frac{v_T}{g}$ . Lo que supondrá que  $\exp(-2) \approx 0.135$ . Valor que consideramos muy bajo para seguir utilizando en la expresión. Obtenemos después de simplificar:

$$y \approx - (2-1) \frac{g}{v_0^2} x^2 + y_0 \tag{28}$$

Como argumentamos antes, la ecuación anterior también es monótona decreciente. De hecho, su pendiente es más pronunciada que la ecuación parabólica. Por lo tanto, también es conveniente definir el valor  $y_0 = -1$ . Comparando el modelo de la ecuación de tiro parabólico con la de arrastre tenemos:

$$\frac{y_p}{y_r} = \frac{-1 - \frac{g}{2v_0^2} x^2}{-1 - (2-1)\frac{g}{v_0^2} x^2} \quad [29]$$

Considerando signos y simplificando la notación  $A = (2-1)$  y  $R = \frac{g}{v_0^2}$ .  
Tenemos:

$$C = \frac{1 - \frac{1}{2} R x^2}{1 + A R x^2} \quad [30]$$

Despejando  $x^2$  de la relación:

$$x^2 = \frac{2}{R} \left( \frac{1-C}{2CA-1} \right) \quad [31]$$

Sustituyendo  $R$  y despejando  $x$ , obtenemos:

$$x = v_0 \sqrt{\left( \frac{1-C}{2CA-1} \right) \frac{2}{R}} \quad [32]$$

Aquí,  $C$  esta acotada entre  $\frac{1}{2A} < C < \frac{1}{A}$ . Retomando la propuesta para el tiempo,  $A = 1$ . Obtenemos:

$$x = v_0 \sqrt{\left( \frac{1-C}{2C-1} \right) \frac{2}{R}} \quad [33]$$

Entonces,  $C$  estará contenido dentro del intervalo (0.5, 1), que es el conveniente para situar la transición adecuada entre ambos modelos. Esta ecuación nos permite la comparación entre los modelos de trayectoria parabólica y con el de arrastre lineal. Como lo expusimos antes, si el criterio es poco estricto, con el ejemplo de que  $C = 0.8$ , en este caso obtenemos:

$$x_{0.8} \approx 0.2608 v_0 \quad [34]$$

Puntualizando, para un proyectil con una velocidad de 350 m/s esta distancia es de 91.287 m. Es decir, más allá de esta distancia no se puede utilizar el modelo parabólico garantizando de que ambas trayectorias se deben ser equivalentes en al menos un 80%.

### Modelo de resistencia cuadrática

La resistencia del aire puede semejarse a un flujo laminar alrededor del proyectil, el cual implica una resistencia linealmente proporcional a la velocidad del proyectil, de ahí que nombremos al modelo como de arrastre lineal. Sin embargo, cuando el flujo es turbulento, la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, por lo que nombramos al modelo como de arrastre cuadrático.

En tales consideraciones se requieren realizar aproximaciones sustanciales desde el principio del planteamiento de las ecuaciones de movimiento. Nuevamente, la mayoría de las propuestas son numéricas y suelen ser más sofisticadas que el objetivo expositivo de este documento. Sin embargo, por completes de esta exposición, presentamos un modelo que considera una trayectoria de ángulo bajo (en inglés: *low angle trajectories* LAT) que implican que la velocidad inicial del proyectil  $v_0 = (v_{0x}, v_{0y})$  presenta diferencias en sus componentes tales que  $v_{0x} \gg v_{0y}$  (11). Entonces la ecuación de movimiento será:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2 \tag{35}$$

Y se debe transformar en componentes como:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -bv_x^2 \\ \frac{dv_y}{dt} &= -bv_y v_x - g \end{aligned} \tag{36}$$

La solución se fundamenta en resolver primero la componente de la velocidad horizontal. Para este caso no presentamos aquí los pasos intermedios, pues son similares a los presentados en el apartado anterior. Considerando las siguientes definiciones

$$a \equiv bv_0x \tag{37}$$

$$v_x = \frac{v_{0x}}{1 + at} \tag{38}$$

$$v_y = \frac{v_{0x} - gt/2}{1 + at} - gt \tag{39}$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{1}{b} \ln(1 + at) \tag{40}$$

$$y = \left( v_{0y} + \frac{g}{2a} \right) \frac{1}{a} \ln(1 + at) - \frac{1}{4} g t^2 - \frac{g t}{v_T} \quad [41]$$

Despejando  $t$  de la ecuación (40), sustituyendo en (41) y considerando un valor de cero en la velocidad inicial en  $y$ , tenemos la siguiente expresión:

$$y = \left( \frac{g b x}{2 a^2} \right) - \frac{g}{4 a^2} (e^{b x} - 1)^2 - \frac{g}{2 a^2} (e^{b x} - 1) \quad [42]$$

Simplificando obtenemos:

$$y = \frac{g b x}{2 a^2} - \frac{g}{4 a^2} e^{2 b x} + \frac{g}{a^2} e^{b x} - \frac{3 g}{4 a^2} \quad [43]$$

Como en los modelos anteriores, consideramos que el movimiento inicia en (0,-1), agrupamos y escribimos en términos de  $b$ . De modo que obtenemos la relación:

$$y = \frac{g}{4 b^2 v_0^2} (2 b x - e^{2 b x} + e^{b x} - 3) - 1 \quad [44]$$

Esta relación tiene un comportamiento diferente a las presentadas anteriormente, contiene un término lineal  $2bx$  que es una recta ascendente, que al restarla de la exponencial de  $2bx$  produce el descenso suave y luego pronunciado que conforma a la curva. El resto de los términos son correctores menores. Sin embargo, existe un término independiente de  $x$  pero que depende del inverso cuadrado de  $b$ . La correcta determinación del valor de  $b$  es crucial para el modelo, pues lo desvía verticalmente para ciertos valores. El parámetro  $b$  se puede escribir en términos de la velocidad terminal  $v_T = \sqrt{g/b}$ . Lo cual facilita el estudio balístico. La velocidad de proyectiles de armas de fuego convencionales, que suelen ser de interés forense, se encuentra en un intervalo de entre los 40 y 70 m/s, pero depende de las características del proyectil lanzado.

### Comparación del modelo de arrastre lineal y de arrastre cuadrático

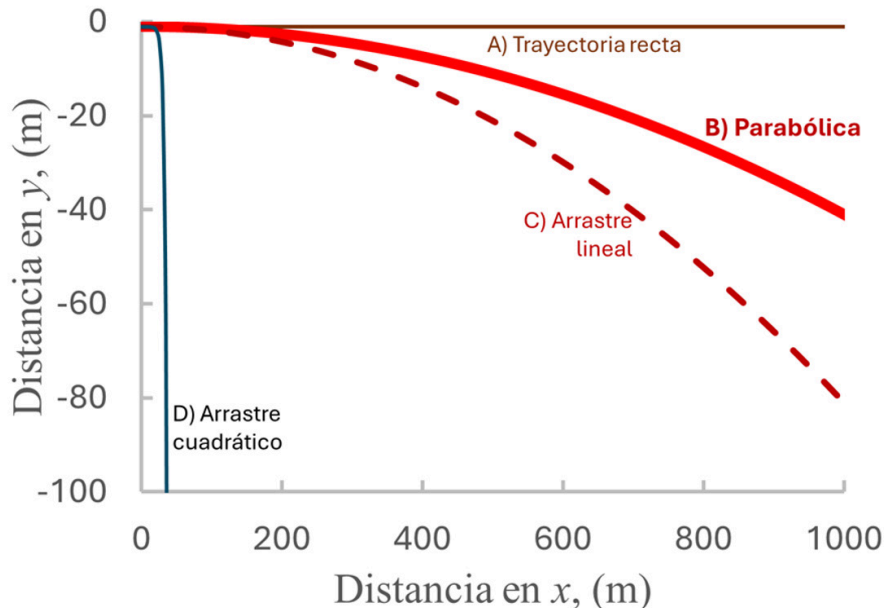
La expresión de arrastre cuadrático propuesta es trascendental, no existe una forma analítica simple para realizar el despeje de la variable  $x$ . Para realizar esta tarea se debe recurrir a métodos numéricos o aproximaciones. Por ejemplo, las fundamentadas en el primero o segundo término de una serie de Taylor en un punto posterior a la correcta utilización del modelo de arrastre lineal, pues antes de tal distancia no tiene un sentido realista. En la comparación con modelos de arrastre lineal y cuadrática se obtiene una expresión cuadrática. Es decir, se obtienen dos soluciones. Lo que resalta que no se cuenta con modelo completamente monótono descendiente. Para ciertas combinaciones de velocidad inicial y terminal se observa que el proyectil se eleva en lugar de

descender. Es claro que la perspectiva analítica no es el mejor camino para comparar estas dos relaciones.

Así, una alternativa más pragmática es graficar las ecuaciones y comparar su división numérica. Lo cual brinda una idea clara del comportamiento entre los dos modelos.

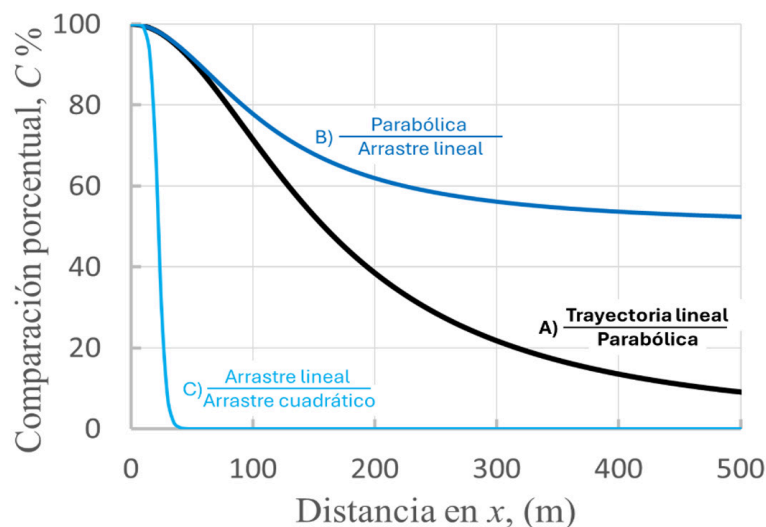
### Comparaciones gráficas

La figura 2 muestra las trayectorias de los cuatro modelos, definiendo una velocidad inicial  $v_0 = 350$  m/s, y velocidad terminal  $v_T = 60$  m/s. Se observa de la figura que el modelo lineal solo es útil a distancias relativamente cortas, también que el modelo parabólico y de arrastre lineal son coherentes con lo pronosticado: que la curva parabólica tenga una desviación de la horizontal menos pronunciada que aquella de arrastre lineal. Sin embargo, el modelo de arrastre cuadrático presenta un descenso abrupto, de tal forma que no se observa una distancia que permita establecer la transición entre modelos. Este comportamiento también era el esperado. Los modelos de arrastre cuadrático implican que el fluido circundante (por el que viaje el proyectil) sea muy denso y de comportamiento no-lineal en comparación con el aire. En otras palabras, si el medio fuera agua, un gel o un tejido blando el modelo de arrastre cuadrático sería el adecuado para describir el movimiento del proyectil en el espacio (12). Con todo, es importante mostrar el resultado y no dejarlo a la especulación.



**Figura 2.** Gráficas de los cuatro modelos: A) trayectoria lineal, B) parabólica, C) arrastre lineal y D) arrastre cuadrático. Observe como el modelo de arrastre cuadrático difiere drásticamente de la evolución del resto de los modelos. Para la elaboración de las curvas se consideraron las condiciones de velocidad inicial de  $v_0 = 350$  m/s, y velocidad terminal  $v_T = 60$  m/s.

En la figura 3 se presenta la comparación gráfica de la división de modelos teóricamente consecutivos: A) la recta entre el parabólico, B) el parabólico entre el arrastre lineal y C) el arrastre lineal sobre el arrastre cuadrático. Al fijar un criterio, por ejemplo, como  $C = 60\%$ , observamos que la distancia que define el modelo de arrastre lineal y el arrastre cuadrático es muy pequeña, tanto que no atraviesa intervalos longitudinales donde se pueden usar los modelos menos sofisticados, esta es una de las razones por las cuales se debe descartar el uso del modelo de arrastre cuadrático en proyectiles que viajan en el aire. En contraste, siguiendo la misma línea horizontal, encontramos la distancia que define la transición entre los modelos de recta y parabólico de hasta 60% de similitud, y a continuación la distancia límite para los modelos comparados de parábola y arrastre lineal. La relación entre estas dos comparaciones es coherente en toda la gráfica. Más aún, es notorio que la comparación del modelo parabólico sobre el arrastre lineal tiende asintóticamente hacia el valor de  $C = 50\%$ ; que era lo esperado de acuerdo con las definiciones en el desarrollo de las ecuaciones.



**Figura 3.** Gráficas de la comparación porcentual entre los modelos en función de la transición ordenada de lineal, a parabólica, con arrastre lineal y arrastre cuadrático. Para la elaboración de las curvas se consideraron las condiciones de velocidad inicial de 350 m/s,  $v_T = 60$  m/s. Observe que en el origen (0 m de distancia) los modelos son equivalentes. A medida que aumenta la distancia horizontal los modelos difieren en su predicción de la distancia vertical. Las distancias de transición del modelo de trayectoria lineal a parabólica y de ésta a con arrastre lineal son coherentes; no así, la transición de la predicción de la comparación del modelo de arrastre lineal a cuadrático.

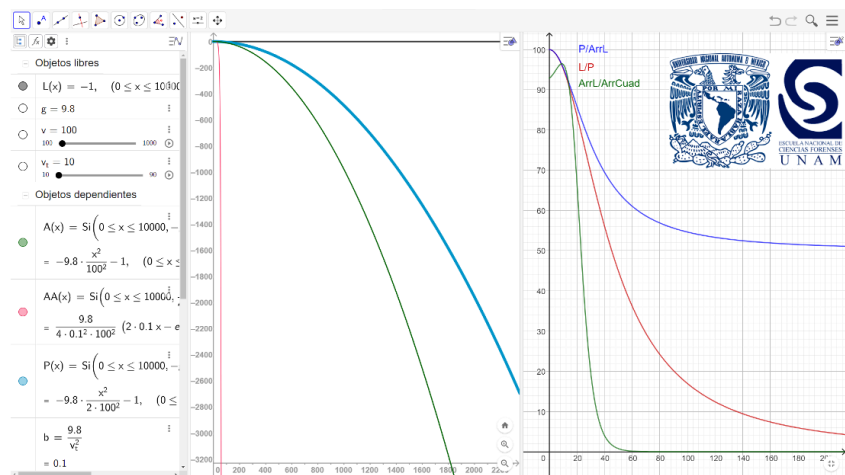
Existen varias propuestas para clasificar a los proyectiles expulsados por arma de fuego. Una es mediante su velocidad inicial; dividiendo en dos categorías los de velocidad baja cuando son impulsados del arma a velocidades menores de 305 m/s y los de velocidad alta cuando los proyectiles superan la velocidad

de 610 m/s (13). Entre estos dos grupos se añade uno más en el intervalo que acotan. En la tabla 1 se consideran estos intervalos y se muestran las distancias límites entre modelos considerando criterios de similitud entre modelos de 90, 80 y 70%.

**Tabla 1.** Valores numéricos de distancia máxima entre modelos de trayectoria considerando tres criterios específicos (90, 80 y 70 %) para proyectiles un proyectil de velocidad baja y otro de velocidad alta.

Velocidad inicial	Distancia (m)			
	300 m/s		650 m/s	
	Lineal a parabólico	Parabólico a arrastre	Lineal a parabólico	Parabólico a arrastre
90	45.175	47.9157	97.880	103.817
80	67.763	78.246	146.820	169.533
70	88.723	117.369	192.233	254.300

Como material adicional a este manuscrito, se programó en la plataforma Geogebra, un *software* matemático de uso didáctico que permite presentar gráficas y cálculos de modo dinámico, las ecuaciones de las trayectorias y sus comparaciones. El programa ofrece la opción de variar automáticamente un parámetro, lo que permite observar el cambio en las gráficas en tiempo real. Su presentación puede ser relevante como herramienta didáctica para comprender mejor los efectos de las velocidades inicial y terminal en los modelos, así como la utilización de sus cotas máximas, ver figura 4. El *software* está disponible vía Internet: <https://www.geogebra.org/m/wbyue5uh>



**Figura 4.** Captura de pantalla del programa GeoGebra donde se programaron los cuatro modelos de trayectorias balísticas: lineal, parabólico, con arrastre lineal y arrastre cuadrático. En el primer panel aparecen las ecuaciones y controles de velocidad inicial y velocidad terminal, además de las calculadoras de xC. En panel intermedio se encuentran las trayectorias, y el panel derecho la comparación entre modelos.

### Comparación de los modelos con datos experimentales

Con el fin de completar este estudio se videograbó un disparo horizontal de una lanzadera (Nerf, modelo Jolt N-strike) de dardos de hule espuma y plástico suave de 7 cm de longitud y 3 gramos de peso. Como material adicional a este documento, el video está disponible al público en general a través de Internet: [https://youtu.be/rtpu\\_6BY6Xg](https://youtu.be/rtpu_6BY6Xg). La intención era registrar suficientes datos de la trayectoria del proyectil para calcular el parámetro de la velocidad inicial y realizar las comparaciones con los otros modelos. De haberse utilizado un arma de fuego la cantidad de datos experimentales sería significativamente menor, además de incrementar las precauciones metodológicas al utilizar estos instrumentos potencialmente mortales. También teniendo en cuenta que, aunque la propuesta expuesta en este documento se centra en el quehacer de la balística forense, no es limitante para su utilización en otras áreas del conocimiento. El registro del movimiento del proyectil se realizó mediante una cámara de un *smartphone* (Motorola. Edge 40Neo) a 240 cuadros por segundo, la cámara se montó en un trípode a una distancia aproximada de 4 m de la lanzadera. El registro de imágenes se activó manualmente. No se requirió mejorar la iluminación ambiente. En estas condiciones se obtuvieron imágenes digitales claras, nítidas, enfocadas y sin vibraciones.

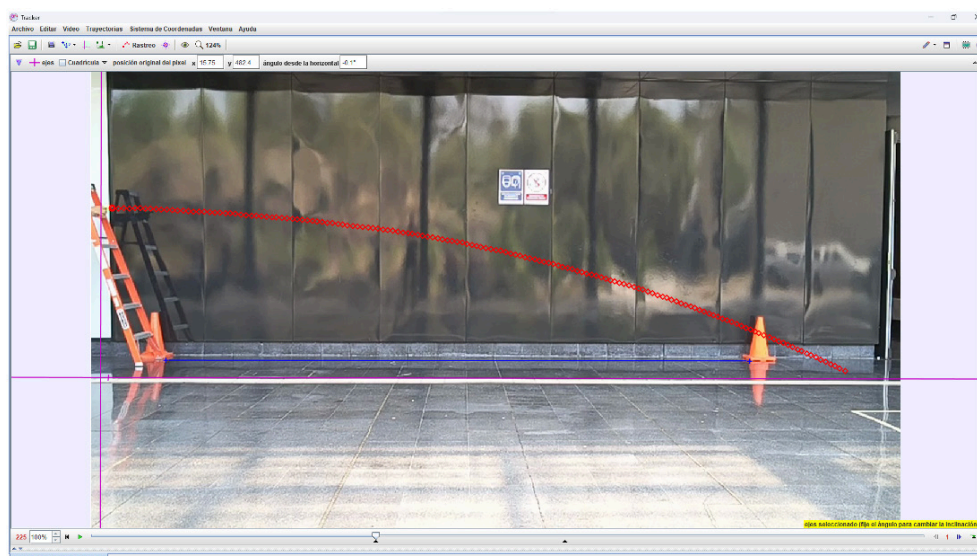
El video se analizó con el programa Tracker Physics. Este *software* es reconocido por su aplicación didáctica de la física y en investigaciones forenses (14,15). En las imágenes el plano del movimiento del proyectil tendía a ser paralelo al sensor de la cámara, y la lente no produjo artefactos o efectos de aberración óptica; por lo cual, no se requirió el utilizar filtros digitales o procesamiento para mejorar el estudio de las imágenes. En Tracker se estableció el marco de referencia con una corrección de giro de 0.1 grados de manera de hacerla paralela a las líneas horizontales en el piso de la imagen. Como testigo métrico se utilizaron dos conos de señalización de tránsito terrestre separados una distancia de 6 m.

La figura 5 presenta una captura de pantalla del programa Tracker y las marcas de los ejes de coordenadas, así como la vara de calibración y los puntos registrados del movimiento del proyectil. Con el programa se obtuvieron 150 puntos. En la figura 6 se muestra una gráfica con los puntos registrados y ajustados a una parábola, de modo que se obtuvo que el ángulo de disparo fue de 1.5 grados y la velocidad de disparo de 12.55 m/s (equivalente a 45.18 Km/h). Si consideramos un criterio  $C = 90\%$ , entonces las distancias límites horizontales que separan el modelo lineal del parabólico (con los primeros 34 puntos) y del parabólico del de arrastre lineal (con los primeros 36 puntos) son respectivamente: 1.89 y 2.01 metros. Como lo explicamos en el desarrollo teórico de las ecuaciones de arrastre, entonces los 114 puntos restantes se pueden ajustar al modelo de arrastre lineal.

En la figura 6 se muestra la gráfica de los datos, las ecuaciones, las curvas de ajuste y el índice  $R^2$ . Hay que aclarar que no se realizaron más estudios



estadísticos sobre estos ajustes, pues la intención es que sea solo un ejemplo. Observamos que el mejor ajuste de todos los datos corresponde al modelo parabólico en comparación con los otros, aunque este no considera cotas de uso. En lo que se refiere a la propuesta de modelos, el modelo de línea recta presentó un aceptable ajuste en su intervalo de uso. El modelo parabólico que solo considera 36 datos mostró un mejor ajuste que el modelo de recta, así como un ángulo de disparo muy aproximado al cero y una velocidad inicial mayor a la calculada inicialmente. La ecuación del modelo de arrastre lineal, con sus 114 puntos, presenta un mejor ajuste que los otros dos modelos, con una velocidad inicial de 18.58 m/s. Es factible que mientras se considere una mayor cantidad de puntos para el ajuste, los efectos de ruido disminuyan y mejore el índice  $R$ . Sin embargo, al inicio del movimiento los efectos de arrastre no son tan trascendentes. Estos resultados dejan clara la importancia de tener criterios fundamentados en la física al utilizar un modelo sobre otro.

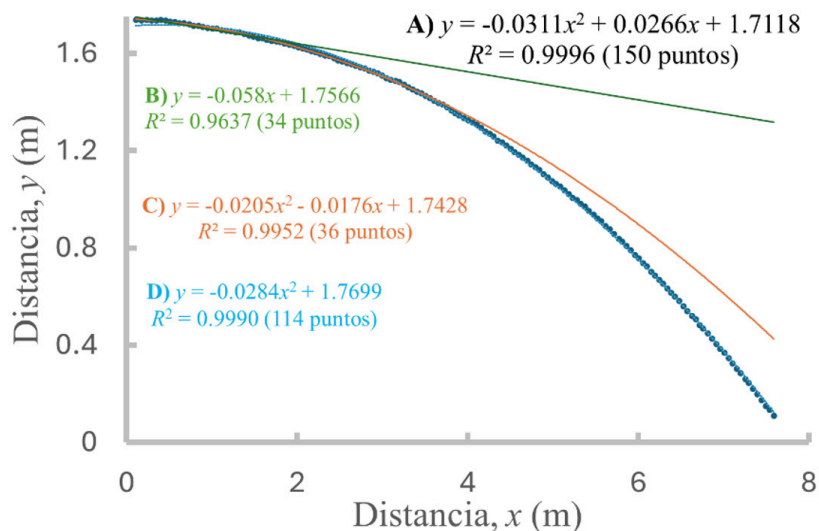


**Figura 5.** Captura de pantalla del programa Tracker, donde se muestra la trayectoria marcada por captura de coordenadas. También se muestra el eje coordenado y la vara de calibración.

### Conclusiones

En esta contribución se han presentado ecuaciones que representan diversos modelos de trayectorias balísticas en el ámbito forense, incluyendo la línea recta, la parabólica, y aquellas que consideran arrastre lineal y cuadrático. A partir de estos modelos, se han deducido dos criterios analíticos para comparar su desempeño, lo que permite determinar en qué circunstancias un modelo más elaborado debería preferirse sobre uno más simple. Así que, para respaldar la elección de una trayectoria de línea recta sobre una parabólica o sobre un modelo de arrastre lineal, se dispone de una justificación numérica que depende únicamente de la velocidad inicial del proyectil. En tales circunstancias la tabla

1 es un buen referente dependiendo de las condiciones de velocidad inicial para dos tipos de arma.



**Figura 6.** Gráfica de 150 puntos de la trayectoria parabólica. También se muestran las ecuaciones de ajuste a los modelos de trayectoria indicando el número de puntos utilizados y el índice estadístico  $R^2$ .

Aunque se presenta una expresión mejorada de las reportadas en la literatura, para el modelo de arrastre cuadrático no se logró obtener una expresión característica posible de comparar con el modelo de arrastre lineal. Y se señalan algunas razones físicas que sugieren lo inapropiado del modelo de arrastre cuadrático en el contexto objeto-aire, pero se reconoce la imperativa necesidad de continuar explorando propuestas analíticas alternativas.

Las bases teóricas que sustentan estas conclusiones han sido reforzadas por mediciones experimentales coherentes, y pueden ser de utilidad didáctica en diversos niveles educativos y para distintos perfiles profesionales. Esta contribución resulta valiosa para la reconstrucción de incidentes balísticos en el ámbito forense, y además no solo limitada a aquellos que involucran proyectiles disparados por armas de fuego.

No obstante, será en futuras publicaciones donde se aborden otros casos de interés relacionados, como las caídas de personas y patrones de proyección de gotas de sangre, entre otros escenarios de aplicación.

## Bibliografía

1. Macías ZIG, Castro EML. Guía para la valoración judicial de la prueba pericial en materia de balística forense. Ciudad de México, Mexico.
2. Haag MG, Haag LC. Shooting incident reconstruction: Academic press; 2020.
3. Hueske EE. Cap. 2: Mathematics of Shooting Reconstruction. En Practical Analysis and Reconstruction of Shooting Incidents.: CRC Press; 2005. p. 24.
4. Galligan AA, Fries C, Melinek J. Gunshot wound trajectory analysis using forensic animation to establish relative positions of shooter and victim. Forensic science international. 2017; 271: p. e8-e13.
5. Kerkhoff W, Broekhuis FR, Mattijssen EJ, Riva F. The systemic error in the vertical component of handgun bullet trajectory reconstructions. Journal of forensic sciences. 2023; 69(2): p. 651-658.
6. Khan A, Shah I, Aziz S, Waqas M, Zaman UKU, Jung DW. Khan, A., Shah, I., Aziz, S., Waqas, M., Zaman, U. K. U., & Jung, D. W. Aerospace. 2022; 9(12): p. 816.
7. Torres-Zúñiga V, Bañuelos-Muñetón JG. Cálculo de la distancia máxima que justifica utilizar el modelo lineal en una reconstrucción de trayectoria balística. Revista Brasileira de Criminalística. 2017; 6(3): p. 7-12.
8. Lehmann CH. Geometría analítica México: Union Tipografica Edition Hispano Americana.; 1959.
9. Quinodoz FD, Moreira SE, Serafin EA. Análisis y Simulación Numérica de la Trayectoria Balística de un Proyectil Conformado por Explosión. Mecánica Computacional. 2021; 38(23): p. 915-922.
10. Yépez Mulia E. Mecánica analítica Ciudad de México, México: Universidad Nacional Autónoma de México; 2007.
11. Warburton RDH, Wang J. Analytic approximations of projectile motion with quadratic air resistance. Journal of service science and Management. 2010; 3(1): p. 98.
12. Fossati del Ángel V. Cotas de máxima penetración de proyectiles calibre 9mm al impactar maniqués biológicos plásticos..
13. Magaña Sánchez IJ,TSJJ,GNLM,&NCO. Conceptos básicos de balística para el Cirujano General y su aplicación en la evaluación del trauma abdominal. Cirujano general. 2011; 33(1): p. 48-53.
14. dos Santos AM, Carvalho PS. Abordagem do movimento relativo através do estudo do movimento parabólico com o uso do software Tracker. Revista do Professor de Física. 2021; 5(1): p. 40-48.
15. Torres-Zúñiga V. Comparación analítica entre video y simulación de una precipitación. Revista Digital de Ciencia Forense. 2022; 1(1): p. 23-37.